OPCIÓN A

1._(2,5 puntos)_ Sea **m** un número real y considere la matriz: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & m\\ m & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

a) _(1 punto)_ Determine todos los valores de **m** para los que la matriz **A** tiene inversa.
b) _(1 punto)_ Determine, si existe, la inversa de **A** cuando **m = 0**.
c) _(0,5 puntos)_ Determine, si existe, la inversa de $\boldsymbol{A^2}$ cuando **m =0**

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & m\\ m & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-m^2-1\Rightarrow |A|=0\Rightarrow -m^2-1=0\Rightarrow m^2=-1\Rightarrow m=\pm\sqrt{-1}\notin\Re$$

$$Existe\ A^{-1}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow \forall x\in\Re$$

$b)$

$$Cuando\ m=0\Rightarrow |A|=-0^2-1=-1\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj\ A^t\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$adj\ A^t=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{(-1)}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$c)$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow |A^2|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}\Rightarrow$$

$$\left(A^2\right)^t=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \left(A^2\right)^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

2.*(2,5 puntos)* Dados el punto $P \equiv$ **(1 , −1 , 0)**, y la recta $s:\begin{cases} -2x+z-1=0 \\ 3x-y-3=0 \end{cases}$

a)*(1,5 puntos)* Determine la ecuación general del plano ($Ax+By+Cz+D$=0) que contiene al punto **P** y a la recta **s**.
b)*(1 punto)* Determine el ángulo que forman el plano π: $\mathbf{2x + y - z + 1 = 0}$ y la recta **s**.

a) El plano π buscado queda determinado por el vector director de la recta **s**, por el vector **PS**, donde **S** es un punto cualquiera de la recta (tomaremos el indicado en su ecuación paramétrica) y el vector **PG**, siendo **G** el punto generador del plano. Estos tres vectores son coplanarios y el determinante de la matriz que determinan es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$s:\begin{cases} z=1+2x \\ y=3x-3 \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-3+3\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(1\,,3\,,2) \\ S(0\,,-3\,,1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(1\,,3\,,2) \\ \overrightarrow{PS}=(0\,,-3\,,1)-(1\,,-1\,,0)=(-1\,,-2\,,1)\equiv(1\,,2\,,-1) \\ \overrightarrow{PG}=(x\,,y\,,z)-(1\,,-1\,,0)=(x-1\,,y+1\,,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$-3\,(x-1)+2\,(y+1)+2z-3z-4\,(x-1)+(y+1)=0 \Rightarrow -7\,(x-1)+3\,(y+1)-z=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 7x-3y+z-10=0$$

$b)$

$$sen\ \alpha=\frac{\left|\overrightarrow{v_s}\cdot\overrightarrow{v_\pi}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_\pi}\right|}=\frac{\left|(1\,,3\,,2)\cdot(2\,,1\,,-1)\right|}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{\left|2+3-2\right|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{84}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}=\frac{3\sqrt{21}}{42}=\frac{\sqrt{21}}{14}\ u$$

$$\alpha=arc\ sen\left(\frac{\sqrt{21}}{14}\right)=19°6'24''$$

3.*(2,5 puntos)* Considere la función: $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+3}{x^2+2}$

a)*(1,5 puntos)* Determine las asíntotas, horizontales, verticales y oblicuas, que tenga la función $f(x)$.

b)*(1 punto)* Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. ¿Tiene la función $f(x)$algún máximo o mínimo relativo?

$a)$

$x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-2}\notin \Re \Rightarrow$ *No hay asíntotas verticales*

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\frac{1+\frac{3}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}}=\frac{1+0}{1+0}=1\Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal$, y=1,$ *cuando* $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-x\right)^2+3}{\left(-x\right)^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\frac{1+\frac{3}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}}=\frac{1+0}{1+0}=1\Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal$, y=1,$ *cuando* $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x^2+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^3+2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x^2+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{-x^3+2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{-\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}{-1+\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{-1+\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{-1}=0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$

Continuación del Problema 3 de la opción A

$b)$

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+2\right)-2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{2x^3+4x-2x^3-6x}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2+2\right)^2}\Rightarrow Crecimiento\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$$

$$\frac{-2x}{\left(x^2+2\right)^2}>0\Rightarrow\begin{cases}-2<0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x>0\\ \left(x^2+2\right)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

-2 < 0	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
(x^2+2) > 0	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**

Crecimiento $\forall x\in\Re/x<0$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re/x>0$

Máximo relativo en $x=0\Rightarrow f(0)=\frac{0^2+3}{0^2+2}=\frac{3}{2}$ de creciente pasa a decreciente

4.*(2,5 puntos)***a)***(1,25 puntos)* Usando el cambio de variable $t=ln(x)$, determine el valor de la integral: $\int\frac{1+3\ln(x)+[\ln(x)]^3}{x\left\{1-[\ln(x)]^2\right\}}dx$

b)*(1,25 puntos)* Determine el límite: $\lim_{x\to0}[\cos(x)]^{\left[\frac{1}{sen\,x}\right]^2}$

$a)$

$$\int\frac{1+3\ln(x)+[\ln(x)]^3}{x\left\{1-[\ln(x)]^2\right\}}dx=\int\frac{1+3t+t^3}{1-t^2}dt$$

$$\ln(x)=t\Rightarrow\frac{dx}{x}=dt$$

$$\begin{array}{r|l} t^3+3t+1 & -t^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{-t^3+t} & -t \\ 4t+1 & \end{array}$$

$$\frac{1+3t+t^3}{1-t^2}=-t+\frac{4t+1}{1-t^2}\Rightarrow\frac{4t+1}{1-t^2}=\frac{4t+1}{(1-t)(1+t)}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}=\frac{A(1+t)+B(1-t)}{(1-t)(1+t)}\Rightarrow$$

$$A(1+t)+B(1-t)=4t+1\Rightarrow\begin{cases}t=-1\Rightarrow A[1+(-1)]+B[1-(-1)]=4\cdot(-1)+1\Rightarrow 2B=-3\Rightarrow B=-\frac{3}{2}\\ t=1\Rightarrow A(1+1)+B(1-1)=4\cdot1+1\Rightarrow 2A=5\Rightarrow A=\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$\frac{4t+1}{1-t^2}=\frac{\frac{5}{2}}{1-t}+\frac{-\frac{3}{2}}{1+t}$$

Continuación del Problema 4 de la opción A

$a)$*Continuación*

$$\frac{1+3t+t^3}{1-t^2}=-t+\frac{\frac{5}{2}}{1-t}+\frac{-\frac{3}{2}}{1+t}$$

$$\int\frac{1+3\ln(x)+[\ln(x)]^3}{x\{1-[\ln(x)]^2\}}dx=\int\frac{1+3t+t^3}{1-t^2}dt\ =\int\left(-t+\frac{\frac{5}{2}}{1-t}+\frac{-\frac{3}{2}}{1+t}\right)dt=-\int t\ dt+\frac{5}{2}\int\frac{dt}{1-t}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1+t}$$

$$\begin{cases}1-t=u\Rightarrow dt=-du\\ 1+t=v\Rightarrow dt=dv\end{cases}$$

$$\int\frac{1+3\ln(x)+[\ln(x)]^3}{x\{1-[\ln(x)]^2\}}dx=\int\frac{1+3t+t^3}{1-t^2}dt=-\frac{1}{2}t^2+\frac{5}{2}\int\frac{-du}{u}-\frac{3}{2}\int\frac{dv}{v}=-\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}\ln u-\frac{3}{2}\ln v$$

$$\int\frac{1+3\ln(x)+[\ln(x)]^3}{x\{1-[\ln(x)]^2\}}dx=-\frac{1}{2}\ln^2 x-\frac{5}{2}\ln(1-t)-\frac{3}{2}\ln(1-t)=\ln^2 x^{-\frac{1}{2}}+\ln(1-\ln x)^{-\frac{5}{2}}+\ln(1+\ln x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\int\frac{1+3\ln(x)+[\ln(x)]^3}{x\{1-[\ln(x)]^2\}}dx=\ln^2\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln\frac{1}{\sqrt{(1-\ln x)^5}}+\ln\frac{1}{\sqrt{(1+\ln x)^3}}$$

$$\int\frac{1+3\ln(x)+[\ln(x)]^3}{x\{1-[\ln(x)]^2\}}dx=\ln^2\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln\frac{1}{(1-\ln x)^2(1+\ln x)\sqrt{(1-\ln x)\cdot(1+\ln x)}}+K$$

$$\int\frac{1+3\ln(x)+[\ln(x)]^3}{x\{1-[\ln(x)]^2\}}dx=\ln^2\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln\frac{1}{(1-\ln x)(1-\ln^2 x)\sqrt{1-\ln^2 x}}+K$$

$b)$

$$L=\lim_{x\to0}[\cos(x)]^{\left[\frac{1}{sen\,x}\right]^2}=[\cos(0)]^{\left[\frac{1}{sen\,0}\right]^2}=1^{\left(\frac{1}{0}\right)^2}=1^\infty\Rightarrow\ln L=\lim_{x\to0}\ln[\cos(x)]^{\left[\frac{1}{sen\,x}\right]^2}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0}\ln[\cos(x)]^{\left[\frac{1}{sen\,x}\right]^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{sen^2 x}\cdot\ln[\cos(x)]=\lim_{x\to0}\frac{\ln[\cos(x)]}{sen^2 x}=\frac{\ln[\cos(0)]}{sen^2 0}=\frac{\ln 1}{0^2}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-sen(x)}{\cos(x)}}{2sen\,x\cdot\cos}=\lim_{x\to0}\frac{-sen(x)}{2sen\,x\cdot\cos^2(x)}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2\cdot\cos^2(x)}=\frac{-1}{2\cdot\cos^2(0)}=-\frac{1}{2\cdot1^2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\ln L=-\frac{1}{2}\Rightarrow L=\lim_{x\to0}[\cos(x)]^{\left[\frac{1}{sen\,x}\right]^2}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e}$$

OPCIÓN B

1. *(2,5 puntos)* Considere las matrices de orden 2 x 2 siguientes:

$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) *(1,5 puntos)* Determine dos matrices M y N de orden 2 x 2 tales que: $\begin{cases} AM+BN=D \\ AM=N \end{cases}$

b) *(1 punto)* Se considera una matriz G de orden 3 x 3, cuyas columnas se representan por $C1$, $C2$, $C3$ y cuyo determinante vale 2. Considere ahora la matriz H cuyas columnas son $C3$, $C3+C2$, $3C1$, ¿cuál es el determinante de esta nueva matriz H ?

$a)$

$$\begin{cases} AM+BN=D \\ -AM+N=0 \end{cases} \Rightarrow NI+BN=D \Rightarrow N(I+B)=D \Rightarrow N(I+B)(I+B)^{-1}=D\,(I+B)^{-1} \Rightarrow N=D\,(I+B)^{-1}$$

$$(I+B)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |I+B|=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2+2=4\neq 0 \Rightarrow Existe\ (I+B)^{-1} \Rightarrow$$

$$(I+B)^{-1}=\frac{1}{|I+B|}\cdot adj\left[(I+B)^t\right] \Rightarrow (I+B)^t=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\left[(I+B)^t\right]=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(I+B)^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow N=D\,(I+B)^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N=D\,(I+B)^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$AM=N \Rightarrow A^{-1}AM=A^{-1}N \Rightarrow IM=A^{-1}N \Rightarrow M=A^{-1}N \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-1-8=-9\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{(-9)}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M=A^{-1}N=\frac{1}{(-9)}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}=\frac{1}{(-36)}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}=\frac{1}{(-36)}\cdot\begin{pmatrix} -10 & -36 \\ 11 & -18 \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix} \frac{5}{18} & 1 \\ -\frac{11}{36} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$\left|C_3 \quad C_3+C_2 \quad 3C_1\right|=\left|C_3 \quad C_3 \quad 3C_1\right|+\left|C_3 \quad C_2 \quad 3C_1\right|=0+3\left|C_3 \quad C_2 \quad C_1\right|=(-1)\cdot 3\cdot\left|C_1 \quad C_2 \quad C_3\right|=-6$$

2. *(2,5 puntos)* Considere las rectas: $r:\begin{cases}2x-4z=2\\ x+y+z=1\end{cases}$ y $s:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{\alpha}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{1}$

a) *(2 puntos)* Determine la posición relativa de dichas rectas, según los diferentes valores de α.
b) *(0,5 puntos)* Si α = 2, determine el ángulo que forman las rectas r y s.
Puestas en paramétricas ambas rectas, estableceremos un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas al igualar sus coordenadas.
Si el determinante de la matriz de los coeficientes ampliada es nulo, y sus vectores directores son iguales o proporcionales pueden ser coincidentes en caso de tener algún punto común o paralelos si no lo tienen, de no ser proporcionales las rectas se cortan en un punto.
De no ser el determinante ampliado nulo la rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} s:\begin{cases}x=2\mu\\ y=-2+\alpha\mu\\ z=\dfrac{1}{2}+\mu\end{cases} \\ \begin{cases}x-2z=1\\ -x-y-z=-1\end{cases}\Rightarrow -y-3z=0\Rightarrow y=-3z\Rightarrow x-3z+z=1\Rightarrow x=2z+1\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=-3\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2\mu=1+2\lambda\\ -2+\alpha\mu=-3\lambda\\ \dfrac{1}{2}+\mu=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\mu-2\lambda=1\\ \alpha\mu+3\lambda=2\\ 2\mu-2\lambda=-1\end{cases}\Rightarrow|A/B|=\begin{vmatrix}2&-2&1\\ \alpha&3&2\\ 2&-2&-1\end{vmatrix}=-6-8-2\alpha-6+8-2\alpha=-4\alpha-12\Rightarrow$$

$$Si\ (A/B)=0\Rightarrow -4\alpha-12=0\Rightarrow\alpha=-3\Rightarrow Si\ \alpha=-3\Rightarrow rang\ (A/B)=2$$

$$\forall\alpha\in\Re-\{-3\}\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3\Rightarrow Son\ rectas\ que\ se\ cruzan\ en\ el\ espacio$$

$$Cuando\ \alpha=-3\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(2,-3,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(2,-3,1)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_s}\Rightarrow Veamos\ si\ tienen\ un\ punto\ común\Rightarrow$$

$$P\left(0,-2,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}2\cdot 0-4\cdot\dfrac{1}{2}=2\\ 0+(-2)+\dfrac{1}{2}\neq 1\end{cases}\Rightarrow No\ pertenece\ a\ la\ recta\ s\Rightarrow Son\ rectas\ paralelas$$

b) Las rectas no se cortan, ya que se cruzan, debido a ello, calculamos el ángulo formado por sus vectores directores

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(2,-3,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(2,2,1)\end{cases}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{|(2,-3,1)\cdot(2,2,1)|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{|4-6+1|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{9}}=\frac{|-1|}{3\sqrt{14}}=\frac{1}{6\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{42}\Rightarrow$$

$$\alpha=arc\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{42}\right)=86°23'18''$$

3. *(2,5 puntos)* **a)** *(1,5 puntos)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función: $g(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$

b) *(1 punto)* Determine: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x}$

$a)$

$$g'(x)=\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x+e^x-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}\Rightarrow Creciente\Rightarrow g'(x)>0\Rightarrow\frac{xe^x}{(x+1)^2}>0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x>0 \\ e^x>0\Rightarrow \forall x\in\Re \\ (x+1)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re \end{cases}$$

	$-\infty$	**0** ∞
x > 0	**(-)**	**(+)**
e^x > 0	**(+)**	**(+)**
$(x+1)^2$ > 0	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall x\in\Re/x>0$ **Decreciente** $\forall x\in\Re/x<0$

Mínimo relativo en $x=0\Rightarrow g(0)=\dfrac{e^0}{0+1}=\dfrac{1}{1}=1$ De decreciente pasa a creciente

$a)$

$$g''(x)=\frac{(xe^x+e^x)(x+1)^2-2(x+1)xe^x}{(x+1)^4}=\frac{(xe^x+e^x)(x+1)-2xe^x}{(x+1)^3}=\frac{x^2e^x+xe^x+xe^x+e^x-2xe^x}{(x+1)^3}\Rightarrow$$

$$g''(x)=\frac{x^2e^x+e^x}{(x+1)^3}=\frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}\Rightarrow Concava\Rightarrow g''(x)>0\Rightarrow\frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}>0\Rightarrow\begin{cases}(x+1)^3>0\Rightarrow x+1>0\Rightarrow x>-1\\ e^x>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ (x^2+1)>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

	$-\infty$	**-1** ∞
x > -1	**(-)**	**(+)**
e^x > 0	**(+)**	**(+)**
x^2+1 > 0	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**

Cóncava $\forall x\in\Re/x>-1$ **Convexa** $\forall x\in\Re/x<0$

Punto de inflexión en $x=-1\Rightarrow g(-1)=\dfrac{e^{-1}}{-1+1}=\dfrac{e^{-1}}{0}\Rightarrow Sin\ solución$ no existe ya que en punto existe una **asíntota vertical**

$b)$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x} = \infty-\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x}\right)\left(\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}\right)}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2+2x+2}\right)^2-\left(\sqrt{3x^2+x}\right)^2}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(3x^2+2x+2\right)-\left(3x^2+x\right)}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x+2-3x^2-x}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x}} = \frac{\infty}{\infty+\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{3\frac{x^2}{x^2}+2\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{3\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{1}{x}}} = \frac{1+\frac{2}{\infty}}{\sqrt{3+\frac{2}{\infty}+\frac{2}{\infty}}+\sqrt{3+\frac{1}{\infty}}} = \frac{1+0}{\sqrt{3+0+0}+\sqrt{3+0}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

4. *(2,5 puntos)* **a)** *(1,25 puntos)* Determine la integral: $\int x^2 sen\,(2x)\,dx$

b) *(1,25 puntos)* Determine el área máxima que puede tener un rectángulo cuya diagonal mide 8 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima?

$a)$

$$\int x^2 sen\,(2x)\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) - \int -\frac{1}{2}\cos(2x)\,2x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \int x\cos(2x)\,2x\,dx$$

$$Por\ \ partes \begin{cases} x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du \\ sen\,(2x)\,dx = dv \Rightarrow v = \int sen\,(2x)\,dx = \int sen\ t\,\frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}\cos t = -\frac{1}{2}\cos(2x) \end{cases}$$

$$2x = t \Rightarrow 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int x^2 sen\,(2x)\,dx == -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \int x\cos(2x)\,2x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}xsen\,(2x) - \int \frac{1}{2}sen\,(2x)\,dx$$

$$Por\ \ partes \begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ \cos(2x)\,dx = dv \Rightarrow v = \int \cos(2x)\,dx = \int \cos h\,\frac{dh}{2} = \frac{1}{2}sen\ t = \frac{1}{2}sen\,(2x) \end{cases}$$

$$2x = h \Rightarrow 2dx = dh \Rightarrow dx = \frac{dh}{2}$$

$$\int x^2 sen\,(2x)\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\ sen\,(2x) - \frac{1}{2}\int sen\,(2x)\,dx =$$

$$2x = r \Rightarrow 2dx = dh \Rightarrow dx = \frac{dh}{2}$$

$$\int x^2 sen\,(2x)\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}xsen\,(2x) - \frac{1}{2}\int sen\ h\,\frac{dh}{2} = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}xsen\,(2x) + \frac{1}{4}\cos 2x + K$$

Continuación del Problema 4 de la opción B

b)

Siendo **L** y **H** los lados del rectángulo

$$\begin{cases} L^2 + H^2 = 8^2 \Rightarrow H^2 = 64 - L^2 \Rightarrow H = \sqrt{64 - L^2} \\ A = LH \end{cases} \Rightarrow A = L\sqrt{64 - L^2} \Rightarrow$$

$$A' = \frac{dA}{dL} = \sqrt{64 - L^2} + \frac{-2L}{2\sqrt{64 - L^2}} L = \frac{64 - L^2 - L^2}{\sqrt{64 - L^2}} = \frac{64 - 2L^2}{\sqrt{64 - L^2}} = 2\frac{32 - L^2}{\sqrt{64 - L^2}} \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow 2\frac{32 - L^2}{\sqrt{64 - L^2}} = 0$$

$$32 - L^2 = 0 \Rightarrow L^2 = 32 \Rightarrow L = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$A'' = \frac{d^2A}{dL^2} = 2\frac{-2L\sqrt{64 - L^2} - \frac{-2L}{2\sqrt{64 - L^2}}\left(32 - L^2\right)}{\sqrt{64 - L^2}} = 2\frac{-2L\left(64 - L^2\right) + L\left(32 - L^2\right)}{64 - L^2} =$$

$$= 2\frac{-128L + L^3 + 32L - L^3}{64 - L^2} = 2\frac{-128L + 32L}{64 - L^2} = \frac{-192L}{64 - L^2} \Rightarrow A''\left(4\sqrt{2}\right) = \frac{-192 \cdot 4\sqrt{2}}{64 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = -\frac{768 \cdot \sqrt{2}}{64 - 32} < 0 \Rightarrow$$

$$Máximo \Rightarrow \begin{cases} L = 4\sqrt{2}\ m \\ H = \sqrt{64 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\ m \end{cases}$$